

Markov-ketjujen sovellus

Samuli Siltanen

27.9.2011

Tarkastellaan neljän operaattorin matkapuhelinmarkkinoita. (Operaattorien nimet on muutettu, eikä tehtävässä esitetyllä taloudellisella datalla ole yhteyttä reaali maailmaan.) Merkitään vaakavektorilla $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ markkinaosuuksia seuraavasti:

x_1 = TNT:n markkinaosuus,

x_2 = Tomeran markkinaosuus,

x_3 = Kaviolinjan markkinaosuus,

x_4 = Orangin markkinaosuus.

Jokainen x :n komponentti toteuttaa $0 \leq x_j \leq 1$, ja lisäksi pätee $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, koska nämä neljä yhtiötä kattavat koko markkinan.

Tarkastellaan neljän operaattorin matkapuhelinmarkkinoita. (Operaattorien nimet on muutettu, eikä tehtävässä esitetyllä taloudellisella datalla ole yhteyttä reaali maailmaan.) Merkitään vaakavektorilla $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ markkinaosuuksia seuraavasti:

x_1 = TNT:n markkinaosuus,

x_2 = Tomeran markkinaosuus,

x_3 = Kaviolinjan markkinaosuus,

x_4 = Orangin markkinaosuus.

Jokainen x :n komponentti toteuttaa $0 \leq x_j \leq 1$, ja lisäksi pätee $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, koska nämä neljä yhtiötä kattavat koko markkinan.

Oletetaan nyt, että kunakin päivänä

- ▶ TNT:n asiakas vaihtaa Tomeralle todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$, Kaviolinjalle todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$ ja Orangille todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$.
- ▶ Tomeran asiakas vaihtaa TNT:lle todennäköisyydellä 0, Kaviolinjalle todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ ja Orangille todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$. Siten asiakas pysyy Tomeralla todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.
- ▶ Kaviolinjan asiakas vaihtaa TNT:lle todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$, Tomeralle todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ ja Orangille todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$. Asiakas pysyy Kaviolinjalla todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$.
- ▶ Orangin asiakas vaihtaa TNT:lle todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$ ja pysyy Orangilla todennäköisyydellä $\frac{9}{10}$.

Määritellään todennäköisyydet p_{ij} seuraavasti:

p_{ij} = todennäköisyys vaihtaa operaattorista i operaattoriin j .

Kokoa Matlabissa matriisi $P = [p_{ij}]$. Tarkista Matlabilla, että kunkin rivin alkioden summa on yksi (käytä transpoosia ja komentoa `sum`). Tällaista matriisia kutsutaan *stokastiseksi*. Oletetaan, että eräänä päivänä markkinaosuusiksi mitataan $x^{(0)} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, eli kaikilla yhtiöillä on saman verran asiakkaita. Tällöin voimme laskea seuraavan päivän markkinaosuudet kaavalla

$$x^{(1)} = x^{(0)}P.$$

(Miksi?) Edelleen, markkinatilanne kahden päivän kuluttua on $x^{(2)} = x^{(1)}P = x^{(0)}PP$, ja n :n päivän kuluttua siis $x^{(2)} = x^{(1)}P = x^{(0)}P^n$. Laske Matlabilla jonon

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$$

jäseniä. Mitä huomaat?